TD M3 - Mécanique des fluides

Bilan d'énergie dans un écoulement stationnaire

Questions de cours

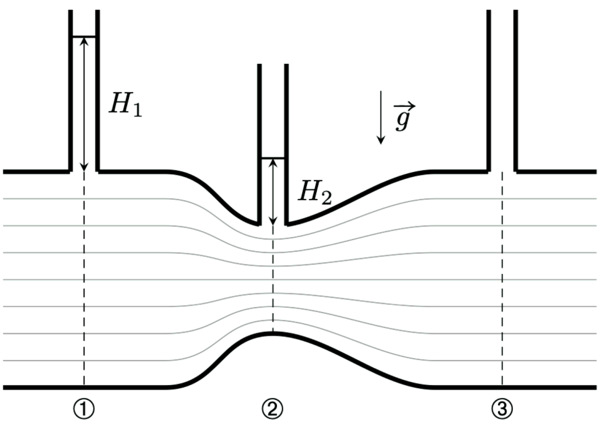
Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Quel système fermé choisit-on pour faire les bilans ?
2. Définir la masse traversante. Quel lien existe-t-il avec le débit massique ?
3. Définir le travail indiqué. Que peut-on en dire dans un système sans pièces mobiles ?
4. Etablir les relations de bilan d'énergie pour un fluide en écoulement stationnaire incompressible.
5. Etablir la relation de Bernoulli pour un écoulement en conduite. *(reprendre la démo générale mais la simplifier avec les hypothèses de la relation de Bernoulli)*
6. Qu'est-ce que l'effet Venturi ?
7. Donner la relation de Bernoulli pour un écoulement à l'air libre.
8. Définir les pertes de charge régulière et singulière.

Exercices de cours - Savoirs-Faire - Gymnastique

SF 1 - Appliquer la relation de Bernoulli - Cas d'un écoulement dans une conduite sans travail indiqué

On considère un débitmètre de Venturi. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible et parfait.



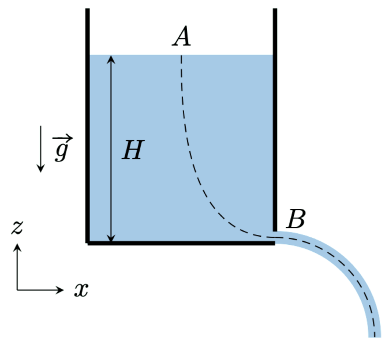
1. H_2 est-elle plus grand ou plus petit que H_1 ?
2. Comment déterminer D_V avec $H_1 - H_2$, si on connait S_1 et S_2 les sections aux points 1 et 2 ?
3. Quelle devrait être la hauteur H_3 au point 3 ? En pratique, que peut-on en dire ?

SF 2 - Appliquer un bilan d'énergie - Cas d'un écoulement dans une conduite avec travail indiqué

On considère une pompe servant à monter de l'eau d'un réservoir à une usine, située 10m plus haut. A l'entrée du tuyau, de section constante, on a une pression $P = P_{atm}$.
On suppose l'écoulement stationnaire, parfait et incompressible.

Quelle doit être la puissance indiquée de la pompe pour obtenir au niveau de l'usine une pression $P = 2,5P_{atm}$ et un débit $D_V = 7$ m^3.h^{-1}.

SF 3 - Appliquer la relation de Bernoulli - Cas d'un écoulement à l'air libre



On considère un réservoir de section $\mathcal{S}$, rempli d'eau. Il se vide via un orifice de section $\mathcal{S}'$ tel que $\mathcal{S}' \ll \mathcal{S}$.
On considère la ligne de courant AB.

Exprimer v_B en fonction de H.

Gymnastique - Différentes écritures du bilan d'énergie

Parmi les écritures ci-dessous du théorème de Bernoulli, indiquer lesquelles sont justes, lesquelles sont fausses, et pourquoi. Pour chaque écriture juste, préciser sa dimension (pression, énergie massique, puissance, etc.). On note les pertes de charge $\Delta p > 0$ (homogène à une pression) ou $\Delta h > 0$ (homogène à une hauteur).

1. $\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{v_s^2}{2} + gz_s = \dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{v_e^2}{2} + gz_e$
2. $p_s + \rho\dfrac{v_s^2}{2} + gz_s = p_e + \rho\dfrac{v_e^2}{2} + gz_e$
3. $\left(\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - \left(\dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{v_e^2}{2} + gz_e\right) = -\Delta p$
4. $D_m\left(\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - D_m\left(\dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{v_e^2}{2} + gz_e\right) = \mathcal{P}_i$
5. $D_m\left(\dfrac{p_s}{\rho} + \dfrac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - D_m\left(\dfrac{p_e}{\rho} + \dfrac{v_e^2}{2} + gz_e\right) = D_m g\Delta h$
6. $D_V\left(p_s + \rho\dfrac{v_s^2}{2} + \rho gz_s\right) - D_V\left(p_e + \rho\dfrac{v_e^2}{2} + \rho gz_e\right) = \mathcal{P}_i - D_V\Delta p$
7. $\left(p_s + \rho\dfrac{v_s^2}{2} + \rho gz_s\right) - \left(p_e + \rho\dfrac{v_e^2}{2} + \rho gz_e\right) = \rho w_i$

Exercices phares

Exercice 1 - Diagramme de Moody

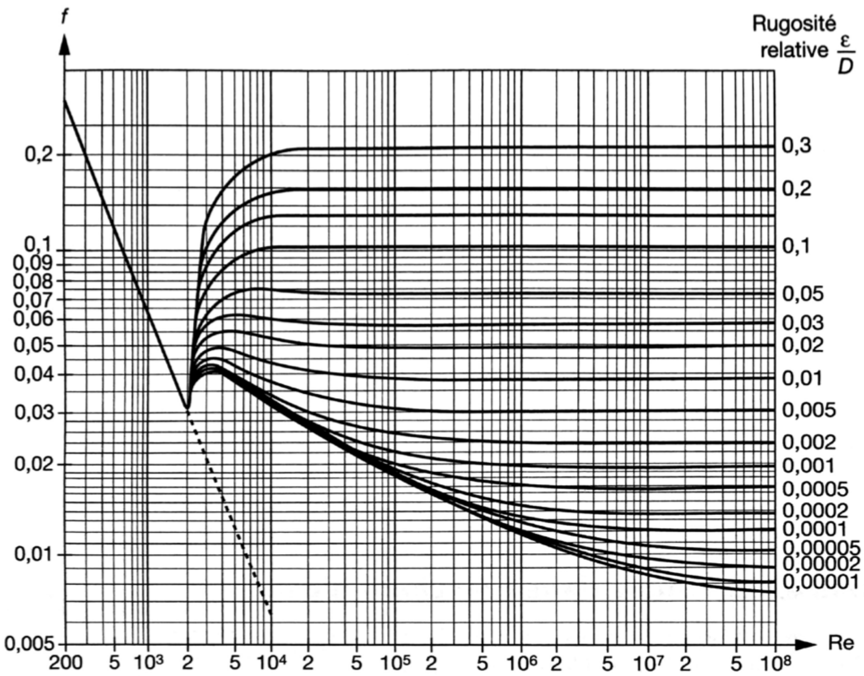
De l'air de viscosité $\eta = 1,8.10^{-5}$ Pl, de masse volumique $\mu = 1,2$ kg.m^{-3} s'écoule dans une conduite de rayon $R = 10$ cm et de longueur $L = 200$ m avec un débit volumique $D_v = 500$ L/s. La rugosité absolue du tuyau est $\varepsilon = 0,075$ mm (la rugosité absolue est la taille typique des irrégularités de surface).

1. Quelle est la vitesse moyenne v de l'écoulement ?
2. En déduire le nombre de Reynolds R_e et la nature de l'écoulement.
3. Pour maintenir un tel écoulement, il faut assurer une différence de pression $\Delta P = P_e - P_s$ entre l'entrée et la sortie du tuyau. Quel est le signe de ΔP ?

On définit le coefficient de friction f tel que : $\Delta P = f\dfrac{L}{2D}\mu v^2$ où D est le diamètre de la conduite.

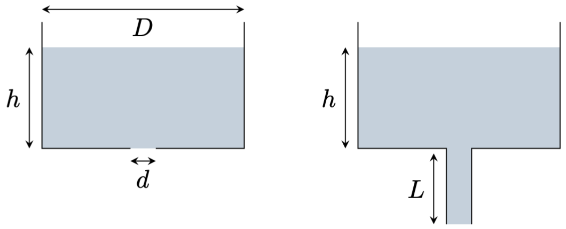
4. Quelle est la dimension de f ?

Le diagramme de Moody donne la valeur du coefficient de friction en fonction des caractéristiques de l'écoulement :



5. Quelle est la différence de pression ΔP à maintenir ?
6. Quel appareil assure ce maintien ?
7. En déduire la puissance P nécessaire pour maintenir l'écoulement.

Exercice 2 - Vidange d'un réservoir



Cet exercice étudie la vidange d'un réservoir de diamètre D par un petit orifice de diamètre d percé au fond, auquel on ajoute éventuellement un tuyau de longueur L de même diamètre. La hauteur d'eau dans le réservoir est notée h.

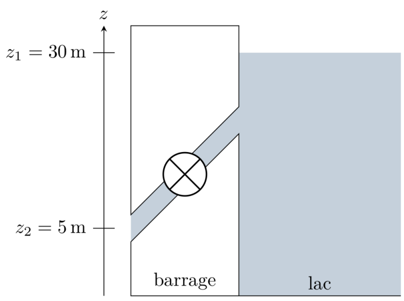
1. Déterminer la vitesse de sortie v_s dans les deux cas.
2. Exprimer le débit. En déduire que la vidange est plus efficace avec le tuyau d'évacuation. On ne s'intéresse qu'à cette méthode de vidange dans la suite.
3. Montrer que la hauteur d'eau dans le réservoir vérifie l'équation différentielle
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(h+L)}$$
4. En déduire la durée de la vidange.
5. Si la pression au sein de l'écoulement devient inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau P_{sat}, l'eau se vaporise, ce qui se traduit par l'apparition de bulles qui perturbent l'écoulement et peuvent aller jusqu'à endommager la conduite d'évacuation. Quelle est la longueur maximale L_{max} au delà de laquelle ce phénomène de cavitation apparaît ?

Exercices en plus

Exercice 3 - Production énergie hydroélectrique

Très classique

L'eau d'un lac de retenue d'un barrage s'écoule par une conduite où se trouve une turbine. La conduite a un diamètre de sortie $D = 2,5$ m et le débit volumique vaut $Q_{vol} = 25$ m^3.s^{-1}.

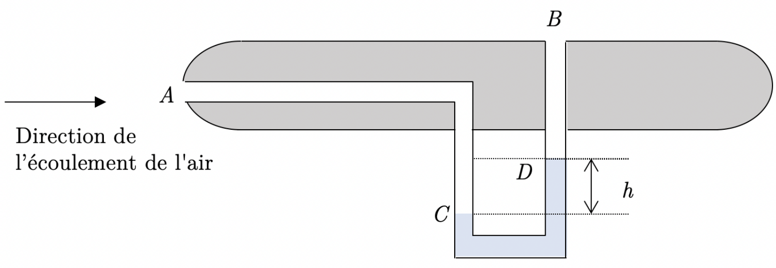


1. Définir physiquement la notion de débit volumique.
2. Donner sans calcul la vitesse à la surface du lac. Calculer la vitesse en sortie de la conduite.
3. En appliquant la relation de Bernoulli, calculer la puissance maximale disponible sur la turbine.
4. Le rendement est en pratique de 60%, ce qui donne une puissance en sortie de turbine de 3,5 MW. Commenter les écarts et quantifier ce phénomène.

Exercice 4 - Tube de Pitot

Très classique

Les tubes de Pitot sont utilisés en aéronautique pour mesurer la vitesse d'un avion. Ils sont constitués d'un tube très fin placé parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air. Les orifices A et B permettent des prises de pressions.



Tube de Pitot

On pourra considérer, qu'étant donnée les dimensions du tube de Pitot, $z_A \simeq z_B$ pour l'écoulement.
On considère que l'air est un fluide parfait et en écoulement stationnaire et incompressible.
On se place dans le référentiel de l'avion. La masse volumique, la vitesse et la pression de l'air loin du tube sont notées respectivement ρ_0, v_0 et P_0.

1. Représenter l'allure de la ligne de courant qui aboutit en A et l'allure de qui longe le tube en B.
2. Que valent les vitesses v_A en A et v_B en B. On appelle le point A, point d'arrêt. Expliquer ce nom.
3. Dans le manomètre, on mesure une dénivellation h entre les deux niveaux de liquide de masse volumique ρ_l. En déduire la vitesse d'écoulement v_0 de l'air.

Données : $h = 24$ cm. ; $\rho_l = 1,0.10^3$ kg.m^{-3}.

Exercice 5 - Filet d'eau

Un filet d'eau coule verticalement à l'air libre après avoir quitté un robinet de section horizontale circulaire de rayon $r_0 = 1$ cm. Le débit volumique $D = 0,2$ L.s^{-1} est constant dans le temps. Le filet d'eau possède une symétrie de révolution autour de l'axe vertical (axe du cercle de rayon r_0). On repère par z les altitudes sur la verticale ascendante, $z = 0$ correspondant à la sortie du robinet.
On considère l'écoulement stationnaire.

1. Quelle est la valeur de la viscosité dynamique de l'eau liquide ? L'écoulement en sortie du robinet est-il laminaire ?
2. Quelle approximation est-il raisonnable d'envisager quant la nature de l'écoulement ? On admet que la pression dans le filet est uniforme et vaut la pression atmosphérique. En coordonnées cylindriques déterminer l'équation $z = f(r)$ d'une génératrice de la surface libre du filet d'eau, i.e. la courbe permettant d'obtenir le profil du filet.

Exercice 6 - Lance incendie

On considère un tuyau de pompier de diamètre $d = 70$mm, montant à une hauteur de 30 m, où il se termine par une lance. Une pompe impose un débit volumique $Q = 500$ L/min, l'eau étant aspirée à partir d'un bassin à l'air libre.

1. Quelle est la vitesse v de l'eau dans le tuyau ?
2. L'eau sort de la lance avec une vitesse d'éjection $v_e = 30$ m/s. Comment l'expliquer ?
3. Quelle doit être la pression au point bas de la lance pour obtenir une telle vitesse en sortie de la lance ?

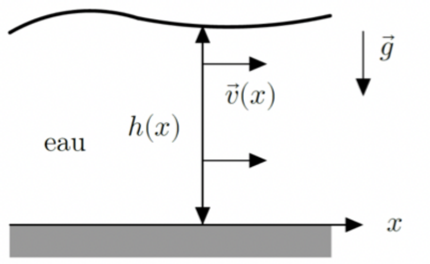
On s'intéresse maintenant aux pertes de charge dans le tuyau, exprimées en Pa/m par $\kappa = f\dfrac{\mu v^2}{2d}$ où $f = 2.10^{-2}$ USI.

4. Quelle est l'unité de f ?
5. Quelle puissance doit fournir la pompe, sachant que le tuyau est long de 200 m au total ?

Exercice pour aller plus loin ⋆⋆⋆

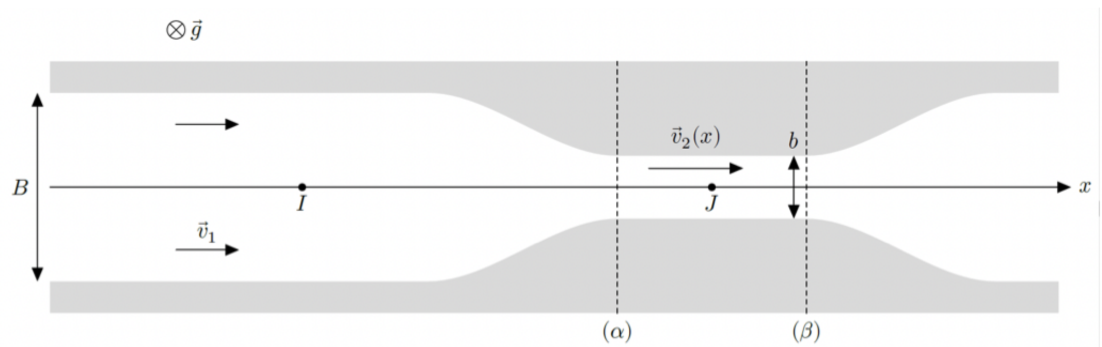
Exercice 8 - Ecoulement fluvial ou torrentiel

Soit de l'eau assimilée à un liquide parfait en écoulement stationnaire et incompressible dans un canal à fond plat de largeur B. On note $h(x)$ la hauteur d'eau dans le canal et $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{u_x}$ la vitesse du fluide, uniforme sur une section (voir figure). La surface libre est à la pression P_0.



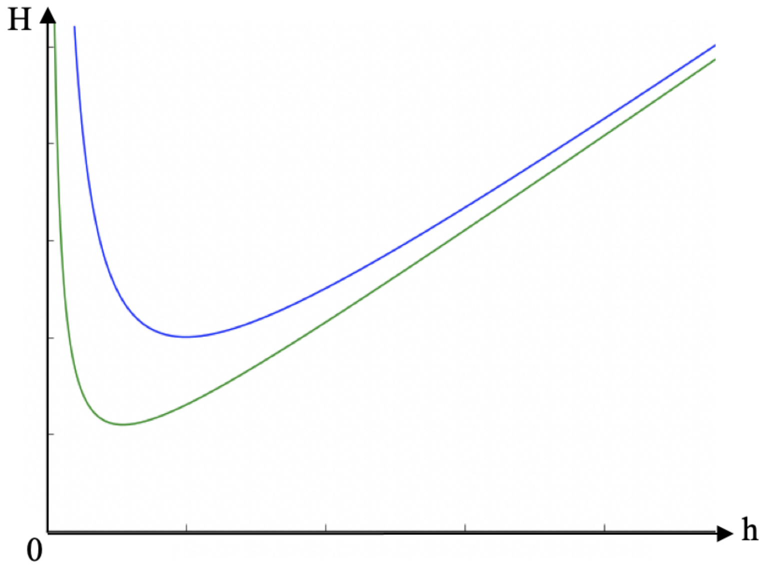
1. On appelle charge spécifique la grandeur $H(x) = h(x) + \dfrac{v^2(x)}{2g}$. Montrer que $H(x)$ est constant pour l'écoulement considéré.
2. Exprimer H en fonction de $h(x)$ et du débit volumique Q. Tracer l'allure de $H(h)$. En déduire que pour un débit volumique et une charge spécifique fixés, il existe en général deux hauteurs h' et h'' possibles pour l'écoulement, avec $h'' > h'$. La solution (h', v') est appelée régime torrentiel et la solution (h'', v'') régime fluvial.
   Justifier ces appellations. Indiquer la zone correspondant à chaque régime sur le tracé de $H(h)$.
3. À débit fixé, déterminer les valeurs h_c et v_c qui minimisent la charge spécifique, en fonction de Q et des données. La solution (h_c, v_c) correspond au régime critique. Exprimer la charge spécifique critique H_c en fonction de h_c.
4. À charge spécifique fixée, tracer l'allure de $Q(h)$. Pour quelle valeur de h le débit est-il maximal ? Identifier les zones d'écoulement fluvial et torrentiel sur le graphe.

Un débitmètre à jaugeur Venturi est constitué d'un canal d'approche à fond plat de largeur B constante et de longueur au moins égale à $10 \times B$, suivie d'un canal de mesure dans lequel le fluide traverse un convergent, un canal droit de largeur b, puis un divergent (voir figure). Deux sondes ultrasonores à la verticale des points I et J mesurent les hauteurs d'eau h_1 et h_2. On note $\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v_2} = v_2\overrightarrow{u_x}$ les vitesses du fluide respectivement en amont du Venturi et dans le canal de largeur b. Les vitesses sont supposées uniformes sur une section droite.



Dans le cas d'un jaugeur Venturi noyé, le régime d'écoulement demeure fluvial. Dans le cas d'un jaugeur Venturi dénoyé, le régime d'écoulement, fluvial en amont, devient progressivement torrentiel entre les sections (α) et (β), en passant par le régime critique, avant de brutalement redevenir fluvial dans le divergent du Venturi.
On pourra négliger la variation de la charge spécifique H lors du passage par le convergent.

5. Quel est le rôle du canal d'approche ?
6. Écrire le débit volumique Q en fonction de v_1, B, h_1 puis en fonction de $v_2(x)$, b, $h_2(x)$.
7. *Cas du jaugeur noyé* : La vitesse $v_2(x)$ est alors uniforme dans tout le canal droit $v_2(x) = v_2$.
   Grâce aux résultats de la question 2, on peut montrer que l'allure des fonctions qui relient la charge spécifique à la hauteur d'eau h, respectivement $H_B(h)$ dans le canal de largeur B et $H_b(h)$ dans le canal de largeur $b < B$ est la suivante :



   Reproduire ce graphe et préciser, en le justifiant, quelle courbe correspond à $H_B(h)$ et quelle courbe correspond à $H_b(h)$.
   Indiquer sur ce graphe la transformation $1 \rightarrow 2$ subie par le fluide au passage par le convergent. En déduire le signe de $(h_2 - h_1)$, puis justifier celui de $(v_2 - v_1)$. En supposant $v_2 \gg v_1$ exprimer le débit volumique Q en fonction de g, b, h_1 et h_2.
8. *Cas du jaugeur dénoyé* : On suppose l'écoulement assez lent en amont, de sorte que l'on pourra considérer que $v_1 \ll \sqrt{2gh_1}$.
   En s'appuyant notamment sur les résultats de la question 3, montrer que l'existence d'un régime critique en un point du canal de largeur b permet de relier Q uniquement à la hauteur d'eau en amont par la relation $Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} b\sqrt{g}h_1^{3/2}$
9. Pourquoi un jaugeur dénoyé est plus précis qu'un jaugeur noyé ?